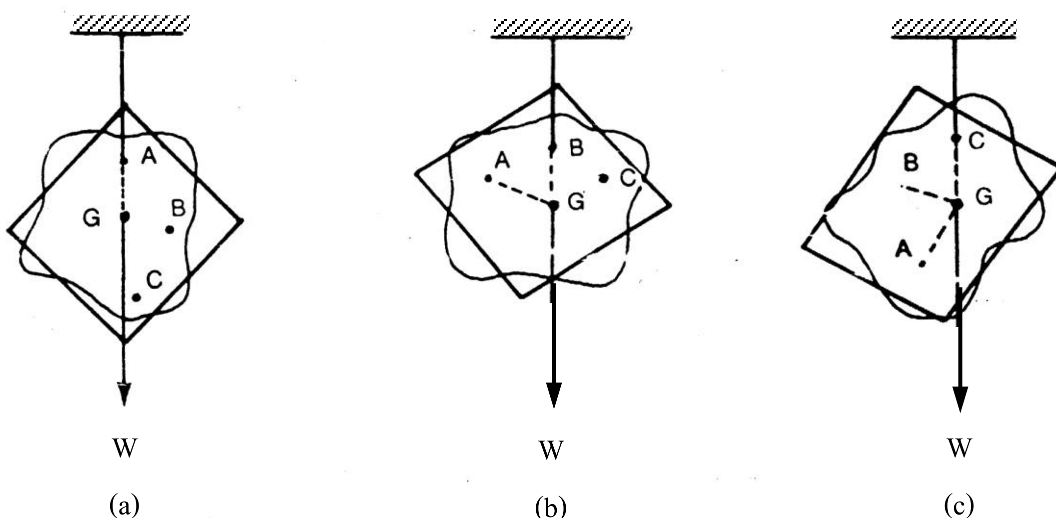
บทที่ 11
เซนทรอยด์ และ จุดศูนย์ถ่วง

11.1 ความนำ

ในบทที่ผ่านมา แรงทุกแรงถือเป็นแรงร่วมกระทำต่อวัตถุที่จุดใดจุดหนึ่ง ด้วยเหตุนี้ จึงสามารถเขียนเวกเตอร์หนึ่งเวกเตอร์แทนแรงรวม ณ จุดที่เสมือนว่าแรงนั้นกระทำ แต่ในความเป็นจริงแล้วแรงดังกล่าวไม่มี เพราะแรงที่ปรากฏในธรรมชาติโดยทั่วไปจะเป็นแรงแบบแผ่กระจายอยู่บนพื้นที่จำกัดอันหนึ่ง หรือปริมาตรของวัตถุ แต่อย่างไรก็ตาม แรงกระจายเป็นแรงรวมแรงเดียวได้เมื่อพิจารณาในกรณีแรงกระทำบนพื้นที่น้อย ๆ เมื่อเทียบกับพื้นที่ทั้งหมดของโครงสร้างนั้น ๆ แรงดึงดูดของโลก ถือเป็นแรงกระจายที่สำคัญ ซึ่งกระจายทั่วทั้งปริมาตรของวัตถุสามารถทำให้ทราบถึงจุดศูนย์ถ่วง (Center of Gravity) ของวัตถุต่าง ๆ ได้

11.2 จุดศูนย์ถ่วง และจุดศูนย์กลางมวล (Center of Gravity and Center of Mass)

แรงกระจายที่สำคัญอันหนึ่ง คือ แรงดึงดูดของโลก ซึ่งแรงนี้จะกระทำต่อทุกอนุภาคของวัตถุ และผลของแรงนี้ทำให้วัตถุมีน้ำหนัก W $(W = m\vec{g})$ เมื่อแขวนเชือกที่จุด A แรงลัพธ์ของแรงดึงดูดของโลก จะอยู่ในแนวเส้นตรงเดียวกับเชือก คือ AG รูปที่ 11.1 (a)



รูปที่ 11.1

ต่อไปถ้าเลื่อนไปแขวนวัตถุที่จุด B และ C จะได้แรงลัพธ์ในแนวเส้นตรง BG และ CG ซึ่งจะเห็นว่าเส้นตรงทั้ง 3 เส้น ตัดกันที่จุด G จุดเดียว เรียกจุดนี้ว่า จุดศูนย์ถ่วง(Center of Gravity) ของวัตถุ และถ้าหากวัตถุอยู่ในสภาวะไร้แรงดึงดูดของโลกแล้ว เรียกจุดนี้ว่า จุดศูนย์กลาง (Center of Mass) ซึ่งมีความหมายว่า จุดในวัตถุที่เสมือนกับว่า มวลทั้งหมดของวัตถุนั้นรวมอยู่ ณ จุดตรงนี้

11.3 เซนทรอยด์ (Centroid) หรือจุดศูนย์กลางของวัตถุ

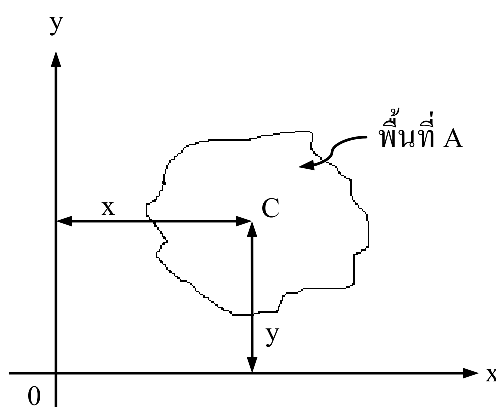
หมายถึง จุดศูนย์กลางทางเรขาคณิตของวัตถุนั้น แต่ถ้าจะพิจารณาถึงสมบัติทางฟิสิกส์ของวัตถุแล้วมักจะใช้เป็น จุดศูนย์กลางมวล อย่างไรก็ตาม จุดศูนย์กลาง (Centroid) และจุดศูนย์กลางมวล (Center of Mass) จะเป็นจุดเดียวกันเมื่อวัตถุนั้นมีความหนาแน่นสม่ำเสมอและถ้าหากวัตถุมีความหนาแน่นไม่สม่ำเสมอแล้ว จุดดังกล่าวทั้งสองจะไม่ทับกัน

การบอกตำแหน่งของจุด Centroid ของวัตถุรูปร่างใด ๆ มักจะบอกในเทอมของระยะค่าเฉลี่ยของโคออร์ดิเนตในระบบพิกัดฉาก(x , y , z)

การหาจุดเซนทรอยด์ หรือจุดศูนย์กลางของวัตถุสามารถแบ่งแยกตามรูปร่างของวัตถุได้ 3 ชนิด คือ เส้น พื้นที่ และปริมาตร ดังนั้น จึงต้องทราบถึงปริมาณที่สำคัญอีก **คือ โมเมนต์ของ**พื้นที่ (Moment of Areas) พื้นที่ผิวที่เกิดจากการหมุนของเส้น และปริมาตรที่เกิดจากการหมุนของพื้นที่รอบแกนใด ๆ ดังนี้

11.4 โมเมนต์ของพื้นที่ (Moment of Areas)

หมายถึง ผลการหมุนของพื้นที่นั้นรอบแกนใดแกนหนึ่ง มีค่าเท่ากับ พื้นที่นั้น คูณด้วยระยะทางจากจุดเซนทรอยด์ถึงแกนหมุน ดังแสดงในรูปที่ 11.2



รูปที่ 11.2

จะได้ว่า โมเมนต์ของพื้นที่ A รอบแกน X คือ

$$M_x = A \cdot y \qquad 11.1$$

และโมเมนต์ของพื้นที่ A รอบแกน Y คือ

$$M_y = A \cdot x \qquad 11.2$$

3.3.2 ทฤษฎีของ Pappus

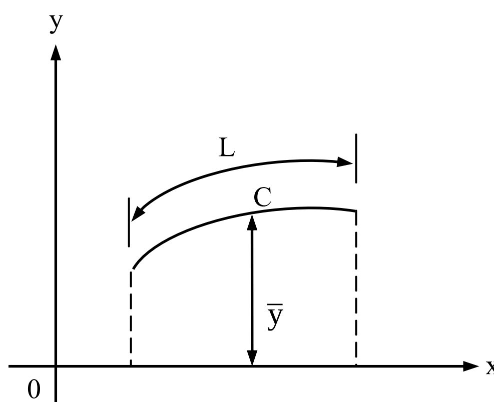
วิธีที่ใช้หาจุดเซนทรอยด์ของวัตถุรูปร่างต่าง ๆ ของเรขาคณิต ได้ง่าย ๆ และสะดวกอีกวิธีหนึ่งก็คือ โดยอาศัยทฤษฎีของ Pappus ซึ่งมี 2 ทฤษฎีย่อย ๆ ดังนี้

(1) พื้นที่ผิวที่เกิดจากการหมุนเส้นโค้งรอบแกนใด ๆ จะเท่ากับ ผลคูณของความยาวของเส้นโค้งนั้นกับระยะทางที่เซนทรอยด์ของเส้นโค้งนั้นเคลื่อนที่ไปโดยที่

(1.1) แกนหมุนต้องไม่ตัดผ่านเส้นโค้ง

(1.2) แกนกับเส้นโค้งต้องอยู่ในแกนเดียวกัน

ดังแสดงในรูปที่ 11.3 นั่นคือ



รูปที่ 11.3

ถ้าหมุนรอบแกน X ได้

$$\bar{Y} = \frac{Sx}{2\pi L} \qquad 11.3$$

ถ้าหมุนรอบแก่น Y ได้

$$\bar{X} = \frac{Sy}{2\pi L} \qquad 11.4$$

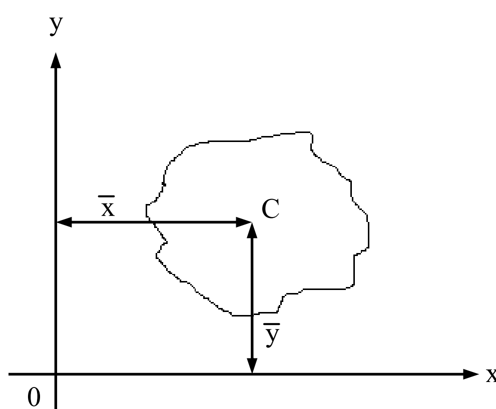
เมื่อ Sx, Sy = พื้นที่ผิวเมื่อหมุนรอบแกน X และ Y ตามลำดับ

L = ความยาวของเส้นโค้งเป็น m

และ (2) ปริมาตรที่เกิดจากการหมุนพื้นที่รอบแกนที่เป็นเส้นตรง จะเท่ากับ ผลคูณของพื้นที่นั้นกับระยะทางที่เซนทรอยด์ของพื้นที่นั้นเคลื่อนที่ไปโดยที่

(2.1) แกนหมุนต้องอยู่ในระนาบเดียวกับพื้นที่นั้น

(2.2) แกนหมุนต้องไม่ตัดผ่านพื้นที่นั้น



รูปที่ 11.4

ถ้าหมุนรอบแกน X ได้ว่า

$$\bar{Y} = \frac{V}{2\pi A} \qquad 11.5$$

ถ้าหมุนรอบแกน Y ได้ว่า

$$\bar{X} = \frac{V}{2\pi A} \qquad 11.6$$

เมื่อ V = ปริมาตรเป็น m^3

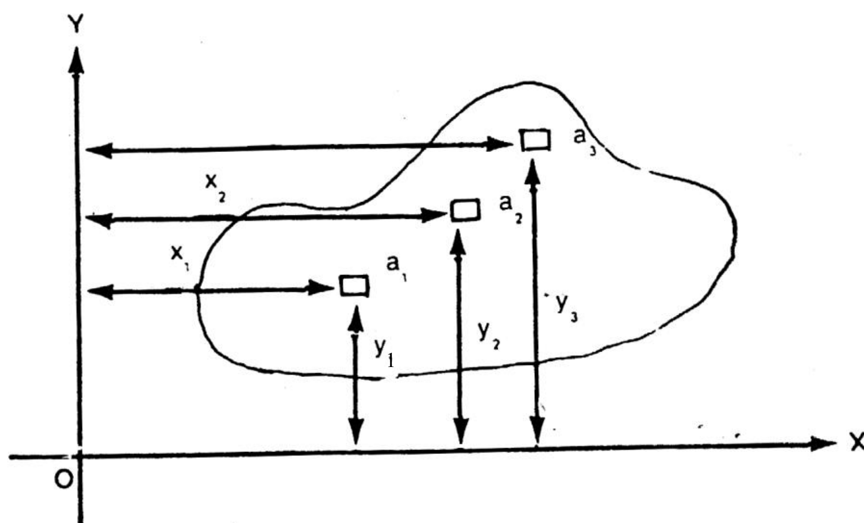
A = พื้นที่

จากสมการที่ 11.3 – 11.4 จะสามารถ

(1) หาเซนทรอยด์ได้ ถ้าทราบปริมาตรหรือพื้นที่ผิว

และ (2) หาปริมาตรและพื้นที่ผิวได้ถ้าทราบเซนทรอยด์

ตัวอย่างที่ 11.1 จงหาเซนทรอยด์สำหรับวัตถุทรงเรขาคณิตที่เป็นเนื้อเดียวกันและมีรูปร่างอย่างเดียวกัน ดังแสดงในรูปที่ 11.5



รูปที่ 11.5

วิธีทำ จากรูปที่ 11.5 พื้นที่ A ถูกแบ่งออกเป็นพื้นที่เล็ก ๆ $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n$ โดยที่พื้นที่เล็ก ๆ เหล่านี้อยู่ที่ตำแหน่ง $(X_1, Y_1), (X_2, Y_2), (X_3, Y_3), \ldots (X_n, Y_n)$ ดังนั้น ผลรวมของโมเมนต์ของพื้นที่เล็ก ๆ นี้ รอบแกน X และ Y จะได้

$$\bar{Y} = \frac{a_1y_1 + a_2y_2 + a_1y_3 + \ldots + a_ny_n}{\mathrm{a}_1 + \mathrm{a}_2 + \mathrm{a}_3, \ldots + \mathrm{a}_\mathrm{n}} \qquad \text{(a)}$$

และ $$\bar{X} = \frac{a_1x_1 + a_2x_2 + a_2x_3 + \ldots + a_nx_n}{\mathrm{a}_1 + \mathrm{a}_2 + \mathrm{a}_3, \ldots + \mathrm{a}_\mathrm{n}} \qquad \text{(b)}$$

หรือจาก (a) และ (b) จะได้

$$\bar{X} = \sum_{i=1}^{n} \frac{a_1X_1}{A} \qquad \text{(c)}$$

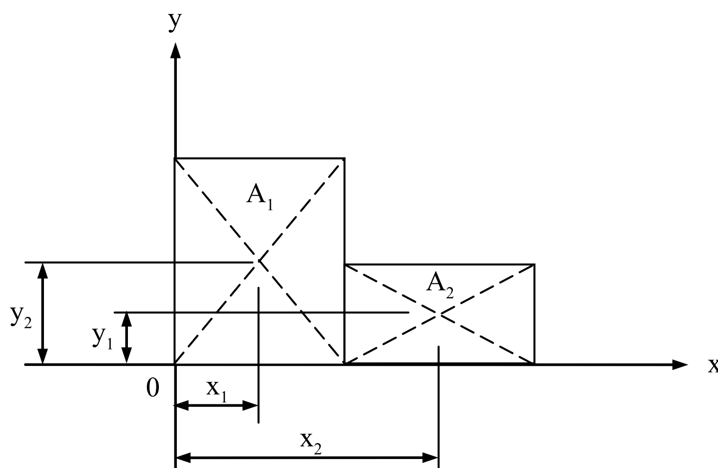
และ $$\bar{Y} = \sum_{i=1}^{n} \frac{a_1Y_1}{A} \qquad \text{(d)}$$

เมื่อ A = $a_1 + a_2 + a_3, \ldots + a_n$

$\bar{X}$ = ระยะจากแกน X ถึงเซนทรอยด์

$\bar{Y}$ = ระยะจากแกน Y ถึงเซนทรอยด์

ตัวอย่างที่ 11.2 จงหาเซนทรอยด์สำหรับวัตถุที่ไม่เป็นเนื้อเดียวกันและมีรูปร่างต่างกัน ดังแสดงในรูปที่ 11.6



รูปที่ 11.6

วิธีทำ จากรูปที่ 11.6 เป็นรูปสี่เหลี่ยมผืนผ้าติดกันเป็นแผ่นเดียว แบ่งพื้นที่ออกเป็น A_1 และ A_2 มีระยะทางจากเซนทรอยด์ถึงแกน X และแกน Y เป็น x_1, x_2, y_1 และ y_2 ตามลำดับ

1) หาระยะ x ได้จากโมเมนต์ของพื้นที่ที่หมุนรอบแกน Y คือ

$$M_y = A_1x_1 + A_2x_2$$

หรือ $x\,(A_1 + A_2) = A_1x_1 + A_2x_2$

$$\overline{X} = \frac{A_1x_1 + A_2x_2}{A_1 + A_2}$$

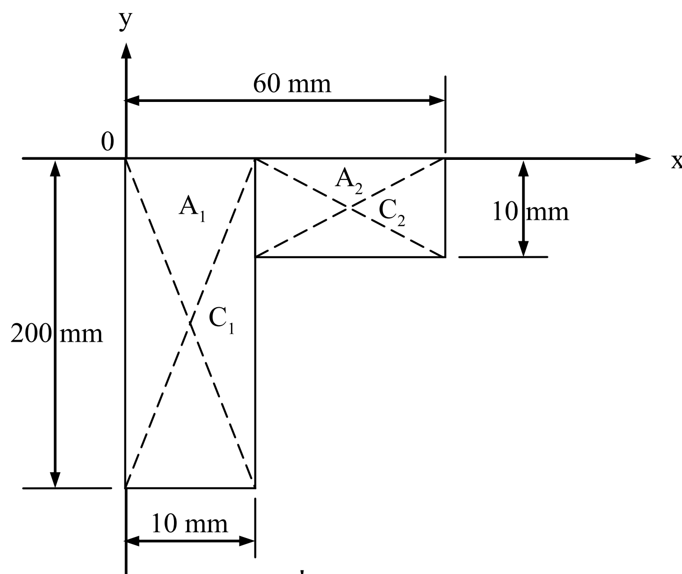
2) หาระยะ Y ได้จากโมเมนต์ของพื้นที่ที่หมุนรอบแกน X คือ

$$M_x = A_1y_1 + A_2y_2$$

หรือ $y\,(A_1 + A_2) = A_1y_1 + A_2y_2$

$$\overline{X} = \frac{A_1y_1 + A_2y_2}{A_1 + A_2}$$

ตัวอย่างที่ 11.3 จงหาเซนทรอยด์ของรูปที่ 11.7



รูปที่ 11.7

วิธีทำ 1) คิดพื้นที่จากค่าที่โจทย์กำหนดให้โดยที่

$$A_1 = (200)(10)(mm)^2$$
$$= (2000)(mm)^2$$

และ
$$A_2 = (60-10)(10)(mm)^2$$
$$= 500\ (mm)^2$$

2) ระยะห่างจากเซนทรอยด์ของแต่ละพื้นที่ ถึงแกน X, Y คือ

$$x_1 = \frac{10}{2} = 5 \text{ mm.}$$
$$y_1 = \frac{200}{2} = 100 \text{ mm.}$$
$$x_2 = \frac{50}{2} + 10 = 35 \text{ mm.}$$
$$y_2 = \frac{10}{2} = 5 \text{ mm.}$$

3) ระยะ x และ y คิดจากโมเมนต์ของพื้นที่ทั้งสองรอบแกน x และ y จะได้หมุนรอบแกน x

$$\bar{x}(A_1 + A_2) = A_1x_1 + A_2x_2$$
$$\bar{x} = \frac{A_1x_1 + A_2x_2}{A_1 + A_2}$$

แทนค่าจะได้
$$\bar{x} = \frac{(2000)(5) + (500)(35)}{2000 + 500}$$
$$= 11 \text{ mm.}$$

หมุนรอบแกน y

$$\bar{y}(A_1 + A_2) = \frac{A_1 y_1 + A_2 y_2}{A_1 + A_2}$$

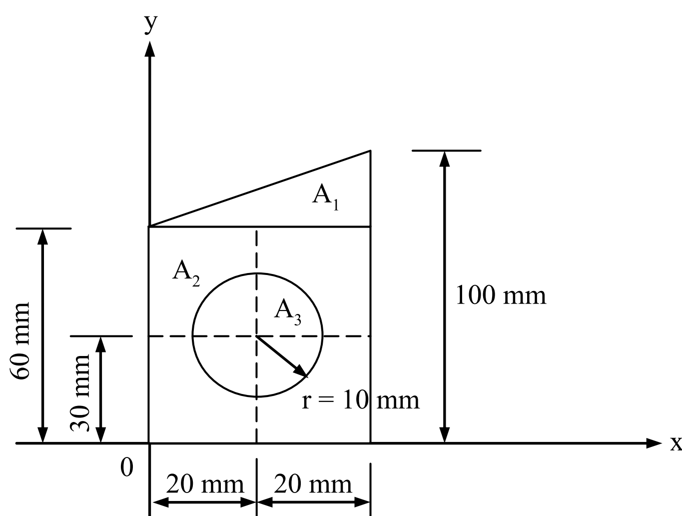
$$\bar{y} = \frac{A_1 y_1 + A_2 y_2}{A_1 + A_2}$$

แทนค่าจะได้ $\bar{y} = \frac{(2000)(100) + (500)(5)}{2000 + 500}$

$= 81$ mm.

ดังนั้นได้จุดเซนทรอยด์อยู่ที่ (x, y) = (11.81 mm.) ตอบ

ตัวอย่างที่ 11.4 จงหาเซนทรอยด์ของรูปแผ่นโลหะเจาะรู ดังแสดงในรูปที่ 11.8



รูปที่ 11.8

วิธีทำ 1) แบ่งพื้นที่ออกเป็น พื้นที่ A_1, A_2 และ A_3 และแทนค่าจะได้

$A_1 = \left(\frac{1}{2}\right)(40)(100 - 60) = 800$ mm^2

$A_2 = (60)(40) = 2400$ mm^2

และ $A_3 = \pi r^2 = (3.141)(10)(10) = 314.1$ mm^2

2) คิดระยะห่างจากเซนทรอยด์ของแต่ละพื้นที่ ถึงแกน X และ Y ได้

$x_1 = \left(\frac{2}{3}\right)(40) = 26.7$ mm.

$y_1 = \left(\frac{1}{3}\right)(40) + 60 = 73.33$ mm.

$x_2 = 20$ mm.

$y_2 = \left(\frac{60}{3}\right) = 30$ mm.

และ $x_3 = 20$ mm.

$y_3 = 30$ mm.

3) หาระยะ X และ Y จากโมเมนต์ของพื้นที่ จะได้

รอบแกน X ได้

$$\bar{y} = \frac{A_1y_1 + A_2y_2 + A_3y_3}{A_1 + A_2 + A_3}$$

$$= \frac{(800)(73.3) + (2400)(30) + (314.1)(30)}{800 + 2400 + 314.1}$$

$\bar{y} = 39.8$ m.

รอบแกน Y ได้

$$\bar{x} = \frac{A_1y_1 + A_2x_2 + A_3x_3}{A_1 + A_2 + A_3}$$

$$= \frac{(800)(26.7) + (2400)(20) + (314.1)(20)}{800 + 2400 + 314.1}$$

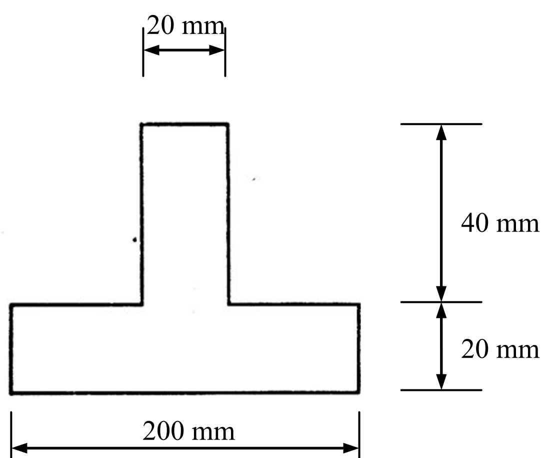
$$= \frac{21360 + 48000 + 6282}{3514.1} = 21.5 \text{ mm.}$$

$\therefore$ ได้ $\bar{x} = 21.5$ mm. ตอบ

แบบฝึกหัดบทที่ 11

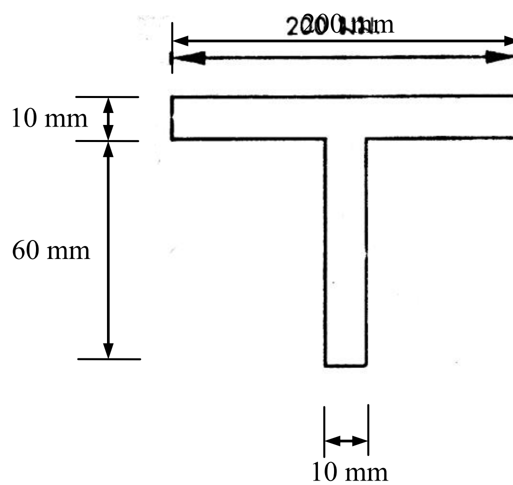
จงหาระยะเซนทรอยด์จากรูปต่อไปนี้

1.



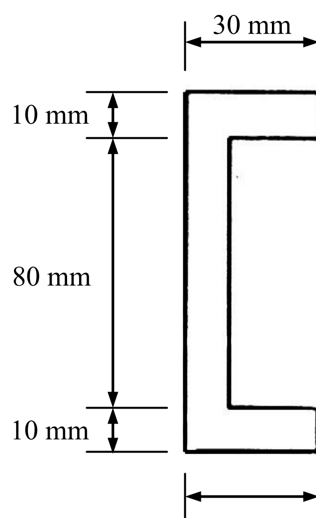
รูปที่ 11.9

2.



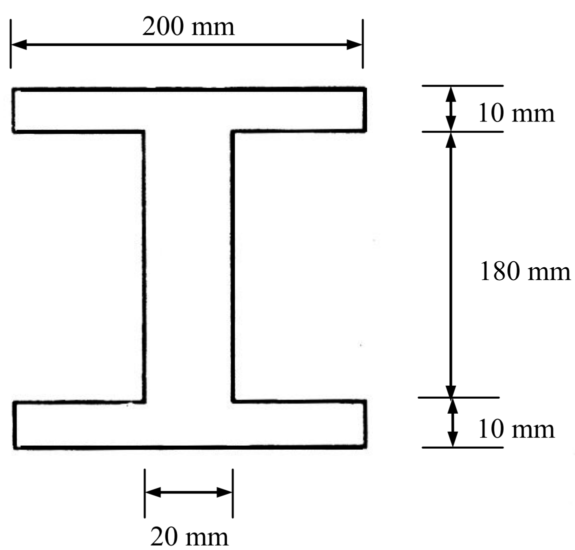
รูปที่ 11.10

3.



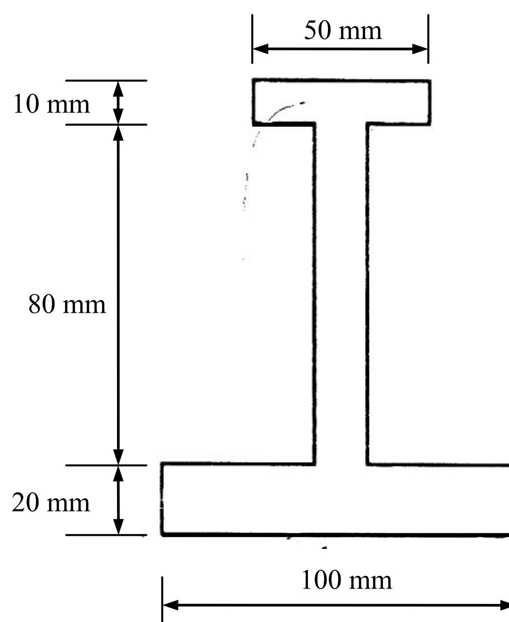
รูปที่ 11.11

4.



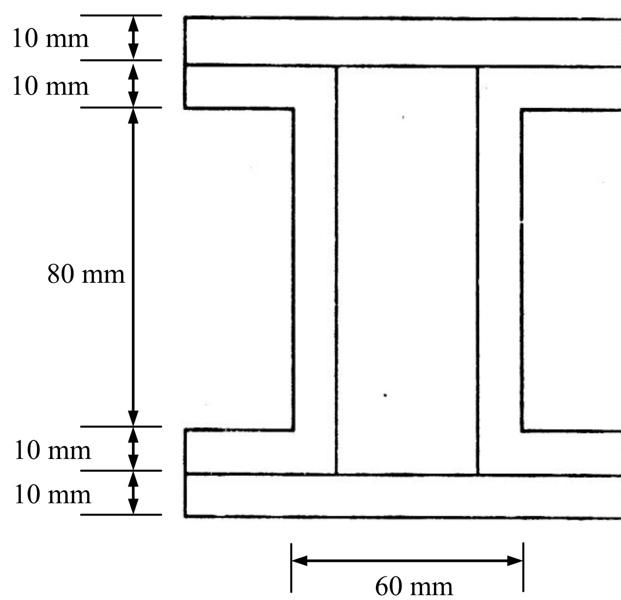
รูปที่ 11.12

5.



รูปที่ 11.13

6.



รูปที่ 11.14